

Anmerkungen zu statistischen Fehlern in Äquivalentbreiten

Zur Erinnerung an Karl-Werner Eversberg (1934 – 2005)

© Klaus Vollmann & Thomas Eversberg



Schnörringen Telescope Science Institute (STSci), Ringweg 7, 51545 Waldbröl, www.stsci.de

14. Juni 2006

Zusammenfassung

Die Messung von Äquivalentbreiten bei sich schnell ändernden atomaren Spektrallinien wird bei kurzen Belichtungszeiten durch wachsende Fehlerbalken ungenauer. Wir ermitteln einen Ausdruck für den Fehler von Äquivalentbreiten in Bezug auf reine Photonstatistik und liefern einen Korrekturwert für frühere Berechnungen.

1. Einführung

Statistische Fehlerbalken bei der Messung von Äquivalentbreiten sind ein wichtiges Thema für astronomische Beobachtungen von hoher zeitlicher und spektraler Auflösung. Diese verringern die Grenzen der Nachweisbarkeit entsprechender Beobachtungen in der Größenordnung von Minuten oder sogar Sekunden. Ein erster Ausdruck zur Bestimmung der Fehlerbalken für reine Photonstatistik wurde von Williams et al. (1974) für ihre Beobachtungen schneller Linienveränderungen in Ap- und Bp- Sternen bestimmt. Dieser wurde von Young (1974) um einen Ausdruck für die atmosphärische Szintillation ergänzt. Lacy (1977) veröffentlichte eine Korrektur von Williams und verglich reine Photonstatistik mit dem Fall inklusive Szintillation für seine schnellen H α - und H β -Beobachtungen bei massiven Sternen. Von dieser Arbeit geleitet ermittelten Chalabaev & Maillard (1983) in einem Anhang über ihre Beobachtungen von schnellen Linienvariabilitäten von Be-Sternen einen neuen Ausdruck für den Fehler der Äquivalentbreite basierend auf reiner Photonstatistik. Allerdings zeigt ihre Herleitung einige Inkonsistenzen, welche wir in dieser Veröffentlichung auflösen wollen.

2. Die Äquivalentbreite von Spektrallinien

In der Praxis kann die Messung von Rauschen innerhalb einer Linie recht schwierig sein da das Photonenrauschen durch Sternvariationen überlagert ist. Daher ist es notwendig einen Ausdruck für die Äquivalentbreite zu ermitteln, welcher diese beiden Parameter trennt um dann einen Ausdruck

für den Fehler σ_λ zu ermitteln. Wir beginnen mit der Definition für die Äquivalentbreite (siehe Fig. 1):

$$W_\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{F_c(\lambda) - F(\lambda)}{F_c(\lambda)} d\lambda$$

oder

$$W_\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[1 - \frac{F(\lambda)}{F_c(\lambda)} \right] d\lambda \quad (1)$$

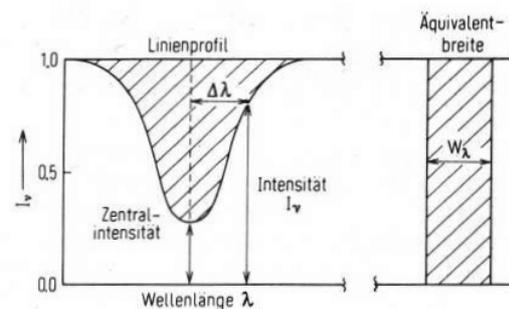


Fig. 1: Die Definition der Äquivalentbreite.

Mit dem Strahlungsfluss im Kontinuum $F_c(\lambda)$, dem Strahlungsfluss in der Linie $F(\lambda)$ bei der Wellenlänge λ und $F_\lambda = F_c$ für $\lambda \geq \lambda_2$ und $\lambda \leq \lambda_1$. Zunächst integrieren wir Gl. (1) separat und wir erhalten

$$W_\lambda = \Delta\lambda \cdot \left[1 - \left(\frac{F(\lambda)}{F_c(\lambda)} \right) \right] \quad (2)$$

In der Praxis ist der auf das Kontinuum normierte mittleren Fluss innerhalb der Linie jedoch nur schwer zu bestimmen. Einfach zu messen sind hingegen die einzelnen Mittelwerte $F(\lambda)$ und $F_c(\lambda)$. Um diese zu erhalten, nutzen wir das arithmetische Mittel und substituieren die einzelnen Flüsse in der Linie bzw. im Kontinuum durch einen jeweiligen Mittelwert plus entsprechende Abweichungen ΔF_i und ΔF_{c_i} (siehe Fig.2). Im Gegensatz zu ΔF_{c_i} besteht ΔF_i nicht nur aus Rauschanteilen sondern ebenso aus Linieninformationen, welche sehr groß

sein können (der Mittelwert \bar{F} entspricht einem Rechteck auf der Linie).

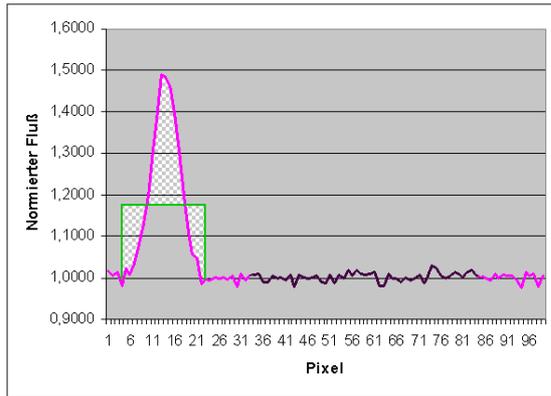


Fig. 2: Synthetische Emissionslinie mit einer Intensität von 1.5. ΔF_i repräsentiert die Abweichungen pro Pixel vom Mittelwert der gesamten Linie und kann im Verhältnis zur Linienstärke sehr groß sein. ΔF_c repräsentiert das im Verhältnis zur Linienstärke kleine Rauschen im Kontinuum.

Man kann nun zeigen¹ dass

$$\left(\frac{F}{F_c} \right) \approx \frac{\bar{F}}{F_c}$$

und Gleichung (2) wird somit zu

$$W_\lambda = \Delta\lambda \cdot \left[1 - \frac{\bar{F}}{F_c} \right]. \quad (3)$$

Wir können also die Äquivalentbreite aus dem Wellenlängenintervall der Linie sowie den beiden mittleren Intensitäten in der Linie und im Kontinuum bestimmen.

3. Der Fehler der Äquivalentbreite

$F(\lambda)$ und $F_c(\lambda)$ werden von statistischen Fehlern beeinflusst. Wenn wir uns in Erinnerung rufen, dass F_c generell außerhalb der Linie bestimmt und über die Linie, wo der Linienfluß F gemessen wird, interpoliert wird und wenn wir davon ausgehen, dass die beiden entsprechenden Fehler nicht korreliert sind, sollten wir in der Lage sein, ihre Standardabweichungen separat zu ermitteln. Unter Anwendung der Technik der Fehlerfortpflanzung erhalten wir für die Varianz von Gl. (3) zu

$$\sigma^2(W_\lambda) = \left[\frac{\partial W_\lambda}{\partial F} \cdot \sigma(\bar{F}) \right]^2 + \left[\frac{\partial W_\lambda}{\partial F_c} \cdot \sigma(F_c) \right]^2$$

mit den Standardabweichungen in der Linie $\sigma(\bar{F})$ und im Kontinuum $\sigma(F_c)$. Mithilfe von Gl. (3) erhalten wir die partiellen Ableitungen zu

$$\frac{\partial W_\lambda}{\partial F} = -\frac{\Delta\lambda}{F_c} \quad \text{und} \quad \frac{\partial W_\lambda}{\partial F_c} = \frac{1}{F_c} (\Delta\lambda - W_\lambda).$$

2.1 Schwache Linien

Bei schwachen Linien kann die Linienstärke vernachlässigt werden und es gilt

$$\sigma(\bar{F}) = \frac{\bar{F}}{S/N}$$

mit dem Signal-zu-Rausch-Verhältnis S/N im ungestörten Kontinuum (siehe Fig.3).

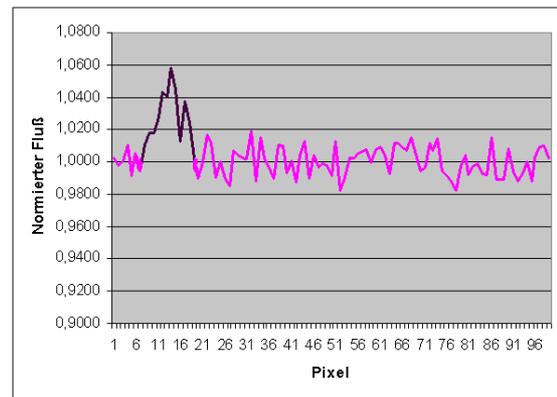


Fig. 2: Synthetische Emissionslinie mit einer Intensität von 1.05. Die Unsicherheit in der Linie wird durch das Signal-zu-Rausch-Verhältnis S/N bestimmt.

Damit erhalten wir

$$\sigma^2(W_\lambda) = \left[\frac{\Delta\lambda}{S/N} \right]^2 \cdot \left[\frac{\bar{F}}{F_c} \right]^2 + \left[\frac{\sigma(F_c)}{F_c} \cdot (\Delta\lambda - W_\lambda) \right]^2 \quad (4)$$

Dabei entsprechen der erste Term der photometrischen Unsicherheit und der zweite Term der Unsicherheit in der Bestimmung des Kontinuums innerhalb der Linie. Gemäß Gl. (3) sind beide Terme identisch und wir erhalten

$$\sigma(W_\lambda) = \sqrt{2} \cdot \frac{(\Delta\lambda - W_\lambda)}{S/N} \quad (5)$$

¹ Das entsprechende Verfahren wird in der englischen Version dieses Textes dargestellt (siehe www.stsci.de).

2.2 Absorptions- und Emissionslinien

Im Falle von Linien mit geringem Fluss (Absorption) und starkem Fluss (Emission) (siehe auch Fig.2) nutzen wir die entsprechende Poisson-Statistik

$$\sigma(W_\lambda) = \sqrt{\frac{F_c}{F}} \cdot \sigma(F_c)$$

und wir erhalten

$$\sigma(W_\lambda) = \sqrt{1 + \frac{F_c}{F}} \cdot \frac{(\Delta\lambda - W_\lambda)}{S/N}. \quad (6)$$

In beiden Fällen können wir die Standardabweichung nun mit den messbaren Parametern S/N , $\Delta\lambda$, F und F_c ermitteln (W_λ ergibt sich nach Gl. (3) aus F und F_c). Darüber hinaus repräsentiert Gl. (6) den allgemeinen Fehler von Äquivalentbreiten und für den Fall $F \approx F_c$ erhalten wir wieder das Resultat aus Gl. (5) für schwache Linien.

Interessanterweise unterscheidet sich unser Ergebnis in Gl. (4) um den Faktor M , der Pixelzahl in der Linie, im ersten Summanden von Gl. (A9) bei Chalabaev & Maillard. Der Grund für diesen Unterschied kann in ihrer Gleichung (A7) gefunden werden. Diese besagt

$$S/N = \frac{F_j}{\sigma(F_j)}.$$

Dabei sagen sie, dass der Wert von S/N die Streuung der einzelnen Pixel im Kontinuum eines einzelnen Spektrums repräsentiert. Ihr $\sigma(F_j)$ repräsentiert also die Standardabweichung für ein einzelnes Pixel und wenn wir $\sigma(F_j)$ in Abhängigkeit von S/N über die gesamte Linie bestimmen wollen, müssen wir das gemessene Rauschen um den Faktor \sqrt{M} skalieren und erhalten somit

$$S/N = \sqrt{M} \cdot \frac{F_j}{\sigma(F_j)}$$

Hätten Chalabaev und Maillard diese Korrektur angewendet, hätten sie dasselbe $\sigma(W_\lambda)$ gefunden wie wir. Dieser Fehler wurde jedoch in allen Publikationen übernommen (bis heute mehr als 40), die den Ausdruck (A9) von Chalabaev & Maillard verwendeten.

Eine entsprechende Korrektur für die bis heute bestimmten Fehlerbalken von W_λ können wir nun leicht angeben. Wir finden

$$\sigma(W_\lambda) = \sqrt{\frac{2M}{M+1}} \cdot \sigma(W_\lambda)_{C\&M}.$$

Für breite Linien ist $M+1 \approx M$ und somit

$$\sigma(W_\lambda) \approx \sqrt{2} \cdot \sigma(W_\lambda)_{C\&M}$$

wobei sich der Index $C\&M$ auf die durch die Methode von Chalabaev & Maillard ermittelten Werte bezieht.

Frühere Schlußfolgerungen in Bezug auf W_λ müssen sorgfältig auf vergrößerte Fehlerbalken geprüft werden, insbesondere wenn die Interpretation der Daten von Messungen an der Detektionsgrenze abhängt. Zur Verdeutlichung führen wir hier zwei herausragende Beispiele an:

- Bei der Suche nach schnellen Linienvariationen im Be-Stern BD+37°1160 versuchten Rossi et al. (1991) eine W_λ -Korrelation zwischen H α und H β (siehe ihre Fig. 4) zu finden. Ihre Folgerung einer spektralen Variabilität in der Größenordnung von ~ 300 s bei diesem Be-Stern kann nicht aufrecht gehalten werden, insbesondere nicht für H β .
- In ihrer Untersuchung periodischer Variabilitäten in UV-Linien des Be-Sterns ζ Cas behaupten Neiner et al. (2003) W_λ -Minima und Maxima im NV 1240 Dublet zu sehen (siehe ihre Fig.2). In Hinblick auf einen Korrekturfaktor von $\sqrt{2}$ ist dies nicht mehr gültig.

Referenzen

- Chalabaev, A., Maillard, J.P., 1983, A&A, 127, 279
 Lacy, D. 1977, ApJ, 212, 132
 Neiner, C., Geers, V.C., Henrichs, H.F., Floquet, M., Frémat, Y., Hubert, A.-M., Preuss, O., Wiersema, K., 2003, A&A, 406, 1019
 Rossi, C., Norci, L., Polcaro, V.F., 1991, ApJL, 249, L19
 Williams, W.E., Frantz, R.L., Breger, M., 1974, A&A, 35, 381
 Young, A.G., 1974, in *Methods of Experimental Physics: Astrophysics*, Ed. N. Carleton (New York: Academic Press), p.101